www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

CONCOURS 1990

E. M. E.

MATHEMATIQUES

Régime économique

JOUR	:	Vendredi 18 mai 1990 8 heures à 12 heures
DUREE	:	4 heures
COEFFICIENT	:	6

- Exercice 1 -

On note E l'ensemble des fonctions polynômes à coefficients réels, de degré au plus égal à 3.

A. — Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, définie par : $\forall\, x \in \mathbf{R},\quad f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

1) Étudier les variations de f et préciser ses branches infinies.

2) Déterminer la concavité et les éventuels points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

3) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède 3 racines réelles distinctes, qu'on note α, β et γ, avec $\alpha < \beta < \gamma$.
Placer α, β et γ par rapport aux nombres $-1; 0; 1; 2; 3$.

4) Tracer $\mathcal{C}_f$ (unités graphiques : 2 cm en abscisse et 0,5 cm en ordonnée).

B. — 1) Soit $P \in E$. Montrer que la fonction polynôme définie par :

$\forall\, x \in \mathbf{R},\quad Q(x) = -P(x)P(-x)$ est une fonction paire.

Que peut-on en conclure sur les coefficients de Q ?

2) Montrer que $\forall\, P \in E,\ \exists\, \widehat{P} \in E,\ \forall\, x \in \mathbf{R},\ -P(x)P(-x) = \widehat{P}(x^2)$.

3) On considère la suite $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de E définie par

$P_0 = f$ et, pour $n \in \mathbf{N}$, $P_{n+1} = \widehat{P}_n$

a) Déterminer P_1, P_2, P_3 et P_4.

Les candidats sont invités à tenir compte de B.- 1) et à utiliser, si nécessaire, leur calculatrice.

b) On note P_n sous la forme

$$\forall\, x \in \mathbf{R},\quad P_n(x) = x^3 - a_n x^2 + b_n x + c_n,\ \text{avec}\ (a_n, b_n, c_n) \in \mathbf{R}^3 .$$

Soit a la racine 16ème de a_4. Calculer $f(a)$ à la précision de la calculatrice.

On se propose d'expliquer le phénomène précédent.

4) a) Montrer que si α_n, β_n et γ_n sont les racines de P_n, alors P_{n+1} admet α_n^2, β_n^2 et γ_n^2 comme racines.

b) Si α_n, β_n et γ_n sont les racines de P_n, exprimer a_n en fonction de α_n, β_n et γ_n.

5) On déduit du B.4) que $\forall\, n \in \mathbf{N},\quad a_n = \alpha^{2^n} + \beta^{2^n} + \gamma^{2^n}$.

Montrer que $lim_{n \to +\infty} (a_n)^{\frac{1}{2^n}} = \gamma$.

.../...

- Exercice 2 -

On munit le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{R}^3$ d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et on considère l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ déterminé par sa matrice A dans $\mathcal{B}$:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & a & b \\ 0 & \beta & c \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad \text{où } \alpha, \beta \text{ et } \gamma \text{ ne sont pas tous égaux .}$$

1) On veut montrer qu'on peut se ramener au cas où $\alpha \neq \gamma$, et pour ce faire on suppose que $\alpha = \gamma$.

a) On suppose dans cette sous-question qu'on a aussi $c = 0$. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ de $\mathbf{R}^3$: $\mathcal{B}' = (e_1, e_3, e_2)$.

b) On suppose dans cette sous-question qu'on a $c \neq 0$. On pose $e_2' = ce_2 + (\alpha - \beta)e_3$. Montrer que $\mathcal{B}'' = (e_1, e_2', e_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$. Exprimer $f(e_2')$ et $f(e_3)$ en fonction de e_1, e_2' et e_3 et en déduire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}''$.

La question 1) a montré qu'on pouvait supposer $\alpha \neq \gamma$, ce qu'on fera dans toute la suite de l'exercice.

2) Montrer que $\forall\, n \in \mathbf{N}$, A^n est de la forme :

$$A^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & a_n & b_n \\ 0 & \beta^n & c_n \\ 0 & 0 & \gamma^n \end{pmatrix}, \quad \text{où } a_n, b_n \text{ et } c_n \text{ vérifient les relations :}$$

$$\begin{cases} a_{n+1} &= \alpha^n a + \beta a_n = \alpha a_n + \beta^n a \\ b_{n+1} &= \alpha^n b + c a_n + \gamma b_n = \alpha b_n + a c_n + \gamma^n b, \\ c_{n+1} &= \beta^n c + \gamma c_n = \beta c_n + \gamma^n c \end{cases} \qquad \text{avec} \quad a_0 = b_0 = c_0 = 0$$

(on pourra remarquer que $A^n A = A A^n$).

3) Déterminer A^n. (Dans le cas où $\alpha = \beta$, on montrera que $a_n = n a \alpha^{n-1}$ si $n \in \mathbf{N}^*$, et on procèdera de manière analogue si $\beta = \gamma$).

.../...

– Exercice 3 –

On mesure la pression P d'un gaz donné correspondant à diverses valeurs du volume V. Une étude théorique a montré qu'il devait y avoir entre P et V une relation du type $P = kV^a$, où k et a sont des constantes.

Les mesures effectuées ont donné les résultats suivants :

n° i de la mesure	1	2	3	4	5	6
Volume V_i (en m^3)	54,3	61,8	72,4	88,7	118,6	194
Pression P_i (en Pascal)	61,2	49,5	37,6	28,4	19,2	10,1

1) Représenter sur un papier à deux échelles logarithmiques, le nuage des points $M_i(V_i, P_i)$.

Les résultats expérimentaux sont-ils graphiquement en concordance avec l'étude théorique effectuée ?

2) On pose $x_i = \log P_i$ et $y_i = \log V_i$ (log désigne le logarithme décimal).

N.B. Pour traiter cette question, les candidats dresseront un tableau de calculs indiquant toutes les valeurs ainsi que les sommes nécessaires à la détermination des paramètres demandés.

Pour réaliser ce tableau, les logarithmes seront arrondis, au plus proche, à 0,0001 près et tous les autres nombres du tableau en seront déduits, et indiqués avec la même précision.

On indiquera les formules utilisées.

a) Déterminer, à 0,0001 près, le coefficient de corrélation linéaire entre x et y.

b) Déterminer, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite de régression D de y par rapport à x. Les coefficients seront donnés à 0,0001 près.

c) Tracer la droite D sur le graphique précédent après en avoir déterminé deux points.

3) Déterminer, à 0,0001 près au plus proche, les coefficients k et a de la relation théorique.

- :- :- :- :- :- :-

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail